

Математические тесты для численного моделирования высокочастотных электронных схем с большим разбросом постоянных времени

В.Б.Маничев, Д.М. Жук, Ф.А.Витюков

МГТУ имени Н.Э.Баумана, manichev@bmstu.ru

Аннотация — Достоверность и точность численного моделирования электронных схем очень важны для автоматизированного проектирования электронных схем (EDA – Electronic Design Automation). Основным недостатком известных пакетов программ автоматизированного проектирования электронных схем (EDA пакетов), например, MicroCAP, Multisim, Symica и др., использующих решатель систем ОДУ SPICE, состоит в получении без диагностических сообщений неверного результата численного моделирования электронных схем при невысоких заданных требованиях к математической точности конечных результатов, т.е. невысокой заданной относительной точности ϵ_{rs} решения соответствующих систем ОДУ (обычно $\epsilon_{rs}=0.001$), математически моделирующих электронные схемы. Невысокие требования к математической точности конечных результатов численного моделирования электронных схем объясняются тем, что исходные внутренние параметры схем и, следовательно, коэффициенты соответствующих систем ОДУ, как правило, получены с невысокой математической точностью. Большинство инженеров не являются специалистами в вычислительной математике и не могут оценить математическую точность полученного численного решения, поэтому качественно верное и точное решение должно быть обеспечено в соответствующих EDA пакетах по умолчанию. Для решения этой проблемы необходимо для конкретных классов проектируемых схем иметь наборы тестовых задач с известным заведомо достоверным и точным решением. В данной статье рассматривается методика тестирования решателей систем ОДУ, реализованных в EDA пакетах, на математических тестовых задачах с известным асимптотическим или аналитическим решением. Рассмотрены тестовые системы ОДУ для численного моделирования высокочастотных электронных схем с большим разбросом постоянных времени, например, для численного моделирования тактовых кварцевых генераторов. Приведены результаты тестирования по данной методике EDA пакета Multisim версии 12.0.

Ключевые слова — автоматизированное проектирование электронных схем, математическое моделирование, численное моделирование, обыкновенные

дифференциальные уравнения (ОДУ), решатель систем ОДУ.

I. ВВЕДЕНИЕ

В статье используется следующая терминология.

Математическая модель (mathematical model) – система ОДУ, отображающая функционирование моделируемой электронной схемы с требуемой достоверностью и точностью.

Компьютерная модель – алгоритмическая и программная реализация математической модели.

Численное (компьютерное) моделирование (simulation) – процесс получения результатов математического моделирования электронных схем с помощью компьютерных моделей.

Жесткие системы ОДУ (stiff ODE systems) – системы ОДУ со степенью жесткости более 10^6 .

Достоверность численного моделирования (reliability of simulation) – отклонение результатов численного моделирования электронных схем от заведомо точных результатов не более чем на 20 процентов (заведомо достоверные результаты получают аналитически или экспериментально, как правило, оценивая относительную погрешность численного моделирования в процентах).

Точность численного моделирования (accuracy of simulation) – фактическая степень отклонения результатов достоверного численного моделирования от заведомо точных результатов, полученных аналитически.

Математическая точность (mathematical accuracy) решения систем ОДУ – заданная относительная погрешность нормы векторов решения систем ОДУ (параметр ϵ_{rs}) по сравнению с заведомо точным аналитическим решением в относительных единицах.

При проектировании конкретного класса электронных схем с помощью EDA пакетов инженеру

необходимо провести тестирование соответствующих пакетов для выявления ошибок и определения, удовлетворяет ли продукт требованиям по достоверности и точности численного моделирования соответствующих схем.

Тестирование необходимо проводить в двух направлениях: тестирование пакета на конкретных известных практических задачах с известным экспериментальным решением и тестирование программы решателя систем ОДУ на известных математических задачах с известным асимптотическим или аналитическим решением. Тестирование должно показывать надежность и эффективность соответствующего пакета программ для данного класса электронных схем и соответственно обеспечить настройку параметров решателей систем ОДУ для получения достоверных и точных результатов численного моделирования. В настоящее время первое направление развито достаточно широко [1], а второе применяется крайне редко, несмотря на то, что оно необходимо для дальнейшего усовершенствования существующих EDA пакетов и разработки новых.

Математические тестовые задачи условно можно разделить на «простые» и «трудные». С «простыми» задачами большинство решателей систем ОДУ SPICE в EDA пакетах справляются без особых затруднений. К ним, например, относятся большинство не жестких систем ОДУ, имеющих решениями функции с плавно меняющимися свойствами. К «трудным» относятся задачи, вызывающие определенные сложности при их решении программами численного моделирования электронных схем. К таким «трудным» задачам относятся рассматриваемые в статье математические тесты для численного моделирования высокочастотных (сильно осциллирующих) электронных схем с большим разбросом постоянных времени, которые моделируются жесткими системами ОДУ.

Тестовые задачи разрабатывались как в схемном, так и в математическом представлении, чтобы можно было сравнивать полученные результаты с решателями систем ОДУ в известных пакетах математических программ MATLAB, Maple, Mathematica и т.п. Тестируемые EDA пакеты должны достоверно и точно решать предлагаемые тестовые задачи при заданной невысокой точности интегрирования $\text{eps}=0.001$.

II. СХЕМНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ОДУ

Математическими моделями электронных схем в программах, использующих решатели систем ОДУ SPICE, являются системы ОДУ вида:

$$G(X, dX/dt, Y, t) = 0 \quad (1)$$

где G - вектор-функция размерностью $m + k$, X - вектор дифференциальных переменных размерностью m , обычно вектор напряжений на емкостях и токов через индуктивности, Y - вектор алгебраических

переменных, размерностью k , обычно вектор напряжений и токов на остальных элементах схемы и вектор узловых потенциалов. Заданы согласованные начальные условия и отрезок интегрирования.

Задача решения систем ОДУ в данной постановке была поставлена Линдой Петзолд и ее научным руководителем, известным математиком Гиром в 1982 г. и был разработан метод формул дифференцирования назад (ФДН - BDF (Backward Differential Formula)) или метод Гира (Gear method), заменой в (1) вектора производных по формулам Гира и решением на каждом шаге интегрирования замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений $G(X, Y) = 0$ относительно дифференциальных и алгебраических переменных X и Y [2], [3].

Для любой системы ОДУ вида (1) можно всегда получить формальную электрическую схему, состоящую только из единичных емкостей, единичных резисторов и независимых источников тока, управляемых напряжениями на этих единичных элементах.

Систему ОДУ (1) всегда можно преобразовать к подсистемам дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$dX_d/dt = F_d(X_d, Y_a, t), \quad (3)$$

$$Y_a = G_a(X_d, Y_a, t), \quad (4)$$

где размерность векторов дифференциальных переменных X_d и алгебраических переменных Y_a в общем случае может оказаться больше, чем размерность исходных векторов дифференциальных переменных X и алгебраических переменных Y . Систему (1) можно преобразовать к подсистемам (3) и (4), используя следующие простые эквивалентные математические преобразования:

- 1) Выделение очередной переменной или ее производной в очередном уравнении системы (1) и перенос этой переменной в левую часть очередного преобразуемого уравнения.
- 2) Введение дополнительных алгебраических переменных, аналогично преобразованию системы ОДУ ТЕСТа 3, приведенному ниже.
- 3) Одновременное прибавление и вычитание нужной переменной в очередном преобразуемом уравнении системы (1) и перенос этой переменной в левую часть преобразуемого уравнения, аналогично преобразованию системы ОДУ ТЕСТа 3, приведенному ниже.

Каждому i -му дифференциальному уравнению подсистемы ОДУ (3) можно сопоставить подсхему, состоящую из зависимого источника тока и единичной емкости, показанных на рис. 1

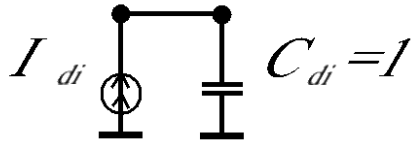


Рис. 1 Подсхема для i -го дифференциального уравнения

В этой подсхеме напряжение на единичной емкости UC_{di} соответствует i -ой дифференциальной переменной x_{di} подсистемы ОДУ (3). Источник тока $I_{di}(UC, UR, t)$ соответствует правой части i -го дифференциального уравнения подсистемы ОДУ (3).

Каждому i -му уравнению подсистемы алгебраических уравнений (4) можно сопоставить подсхему, состоящую из зависимого источника тока и единичного сопротивления, показанных на рис. 2

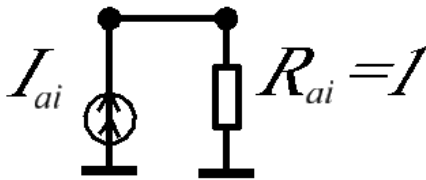


Рис. 2 Подсхема для i -го алгебраического уравнения

В этой подсхеме напряжение на единичном сопротивлении UR_{ai} соответствует i -ой алгебраической переменной y_{ai} подсистемы (4). Источник тока $I_{ai}(UC, UR, t)$ соответствует правой части i -го уравнения подсистемы алгебраических уравнений (4).

Таким образом, любая система ОДУ вида (3) и (4) может быть представлена множеством однотипных подсхем, показанных на рис. 1 и рис. 2.

III. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ С БОЛЬШИМ РАЗБРОСОМ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ

ТЕСТ 1. Жесткая система ОДУ 2-го порядка с переменной степенью жесткости (MU – параметр жесткости) – осциллятор Ван дер Поля [4].

$$\begin{cases} dx_1 / dt = x_2 \\ dx_2 / dt = -x_1 + MU \cdot (1 - x_1^2) \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1,$$

$$t \in [0, 4.2MU].$$

Это классический математический тест для программ-решателей жестких систем ОДУ, которые моделируют электронные схемы с большим разбросом постоянных времени.

Решатель жесткой системы ОДУ должен выдавать правильное асимптотическое решение как минимум до $MU=10^6$.

ТЕСТ 2. Для тестирования из набора тестовых схем [1] была выбрана линейная электрическая схема (high Q filter circuit (рис. 3)) с многопериодным решением, которая моделируется системой ОДУ 5-го порядка.

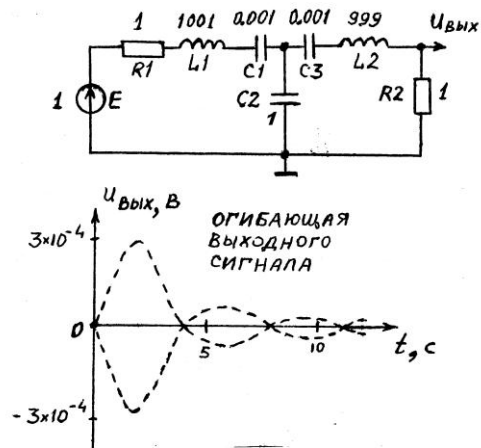


Рис. 3. Тестовая электронная схема – высокочастотный фильтр

Для тестирования качества реализации алгоритмов автоматического выбора шага интегрирования в решателях системы ОДУ предлагается методика согласованного изменения параметров тестовой электронной схемы и соответствующей системы ОДУ, моделирующей динамические переходные процессы в этой схеме.

Для данной тестовой схемы известно соответствующее аналитическое решение, полученное для исходных значений параметров этой схемы, показанных на рис.3. Для согласованного изменения параметров тестовой схемы введем 6 масштабных коэффициентов: Kt, Ku, Ki, KR, KC, KL для соответствующих переменных и параметров схемы. При этом размерности для каждой переменной и параметра схемы следующие:

время	$t [c * Kt];$
напряжение	$u [B * Ku];$
ток	$i [A * Ki];$
сопротивление	$R [Om * KR];$

емкость $C [\Phi * KC];$
индуктивность $L [Гн * KL].$

Масштабные коэффициенты для переменных схемы Kt , Ku и Ki взаимно независимы и поэтому могут задаваться произвольно. Масштабные коэффициенты для других параметров схемы рассчитываются по формулам:

$$KR = Ku/Ki; KC = Kt * Ki / Ku; KL = Kt * Ku / Ki.$$

Разброс абсолютных численных значений переменных при численном моделировании схемы будет соответствовать значениям варьируемых масштабных коэффициентов, а характер переходных процессов теоретически не должен изменяться при любых значениях масштабных коэффициентов, т.к. они изменяются согласованно, например, для второго варианта тестирования $t[мс]$, $u[B]$, $i[A]$, $R[Ом]$, $C[мФ]$, $L[мГн]$ затем $t[мкс]$, $u[B]$, $i[A]$, $R[Ом]$, $C[мкФ]$, $L[мкГн]$ и т.д.

Система ОДУ для этого теста имеет вид:

$$kr = ku / ki, kc = kt \cdot ki / ku, kl = kt \cdot ku / ki,$$

$$\begin{cases} dx_1 / dt = x_4 / 0.001 \cdot kc \\ dx_2 / dt = x_5 / 0.001 \cdot kc \\ dx_3 / dt = (x_4 - x_5) / kc \\ dx_4 / dt = (ku - x_1 - x_3 - kr \cdot x_4) \cdot / 1001 \cdot kl \\ dx_5 / dt = (-x_2 + x_3 - kr \cdot x_5) / 999 \cdot kl \end{cases}$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0,$$

$$t \in [0, 12560kt].$$

ТЕСТ 3. Решение большого количества практических электронных схем показало, что не достоверные решения часто бывают при интегрировании функций, имеющих разрывы производных этих функций по времени (в основном, при наличии кусочно-линейных функций, зависящих от времени).

Тестовая задача 3 является классическим примером такой задачи: численное интегрирование дифференциальных уравнений емкостного делителя напряжения из 2-х последовательно соединенных конденсаторов $C1$ и $C2$, когда емкость конденсатора $C2$ является функцией напряжения на обкладках этого конденсатора и на делитель напряжения подается пилообразный входной сигнал от 0В до 1В (толстые линии на рис. 4) с периодом $t1=1$ сек.

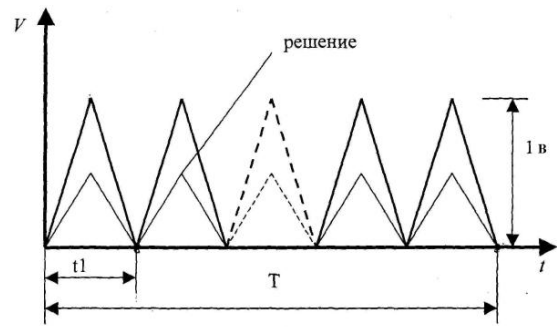


Рис. 4. Входной сигнал, подаваемый на емкостной делитель напряжения

Математической моделью этой тестовой задачи будет система ОДУ вида (1) из трех уравнений:

$$\begin{cases} C1(dU_{C1}(t)/dt) - i(t) = 0 \\ C1(0.5 - U_{C2}(t)) \times (dU_{C2}(t)/dt) - i(t) = 0 \\ U_{C1}(t) + U_{C2}(t) - V(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

относительно трех переменных $U_{C1}(t)$, $U_{C2}(t)$, $i(t) = i_{C1}(t) = i_{C2}(t)$.

Аналитическое решение этой задачи (в модели все переменные рассматриваются безразмерными) для конденсатора $C2$ при начальных условиях $U_{C1}(0) = 0$ и $U_{C2}(0) = 0$ имеет вид:

для напряжения:

$$U_{C2}(t) = C1 + C2(0) - \sqrt{(C1 + C2(0))^2 - 2 \cdot C1 \cdot V(t)}.$$

для тока:

$$i_{C2}(t) = \frac{C1 \cdot (0.5 - U_{C2}(t))}{\sqrt{(C1 + C2(0))^2 - 2 \cdot C1 \cdot V(t)}}$$

Необходимо получить численное решение для напряжения и тока на конденсаторе $C2$, которое должно совпадать с аналитическим решением.

IV. ТЕСТИРОВАНИЕ EDA ПАКЕТА MULTISIM ВЕРСИИ 12.0

В решателе систем ОДУ SPICE EDA пакета Multisim версии 12.0 реализованы 2 метода интегрирования: неявный метод трапеций (Trapezoidal, по умолчанию) и метод Гира (Gear).

ТЕСТ 1. Схемное представление системы ОДУ для ТЕСТа 1 реализуется с помощью источников тока, управляемых напряжением (ABM Current source) и единичных емкостей, показанных на рис. 5.

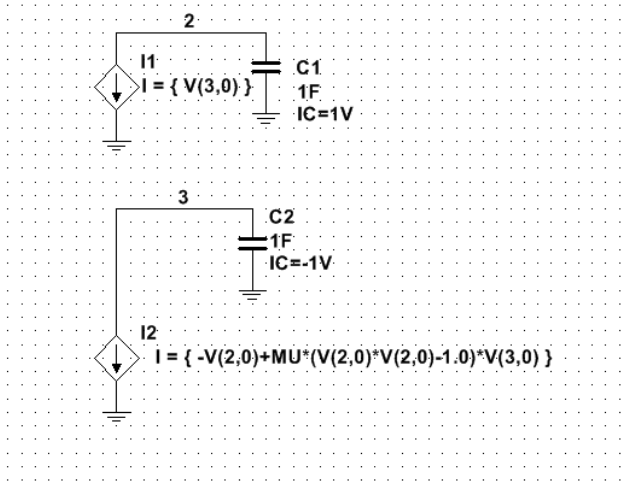


Рис. 5. Схемная модель системы ОДУ для осциллятора Ван дер Поля

Уже при $MU=10$ метод трапеций выдал не достоверный результат без диагностического сообщения об ошибках (рис. 6), при этом метод Гира выдал верный результат, показанный на рис. 7, но выдавал не достоверный результат для $MU>10^5$

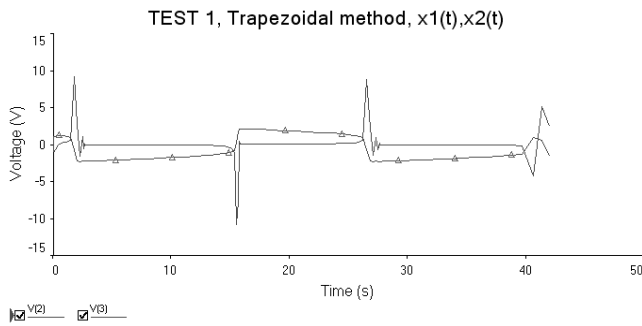


Рис. 6. Расчет теста 1 методом трапеций для $MU=10$

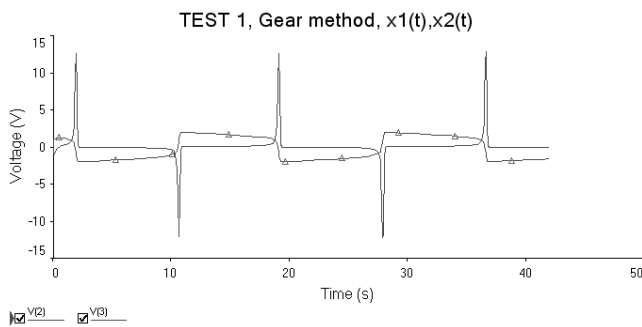


Рис. 7. Расчет теста 1 методом Гира для $MU=10$

ТЕСТ 2. Метод Гира выдал не достоверное решение без диагностического сообщения об ошибках уже при начальных значениях параметров теста (рис. 8).

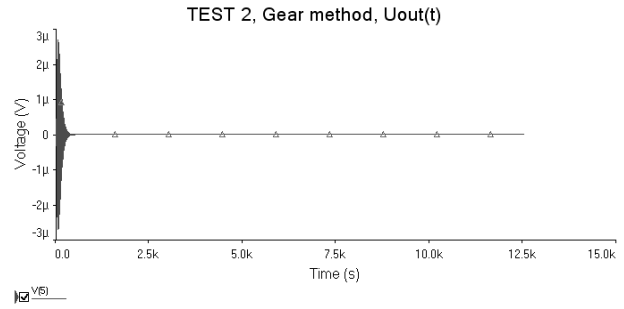


Рис. 8. Расчет теста 2 методом Гира

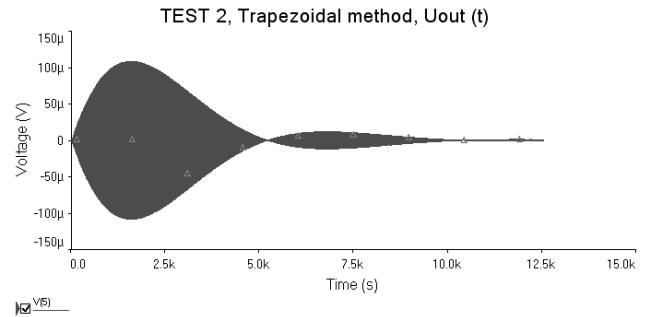


Рис. 9. Расчет теста 2 методом трапеций

Неявный метод трапеций успешно справился с тестом 2 (рис. 9) при варьировании параметров Ki и Ki , но при варьировании параметра Kt приводил к значительному увеличению времени счета, что означает ошибки в реализации алгоритмов автоматического выбора шага интегрирования.

ТЕСТ 3. Обозначим напряжения на конденсаторах через $x_1(t)$ и $x_2(t)$, ток через конденсаторы через $y_1(t)$ и введем дополнительную алгебраическую переменную $y_2(t) = V(t)$. Систему ОДУ (5) приведем к виду подсистем ОДУ (3) и подсистем алгебраических уравнений (4):

$$\begin{cases} dx_1 / dt = y_1 / C1 \\ dx_2 / dt = y_1 / C1(0.5 - x_2) \\ y_1 = y_1 + x_1 + x_2 - y_2 \\ y_2 = V(t) \end{cases} \quad (6)$$

Для системы уравнений (6) была получена соответствующая электрическая схема по вышеприведенной методике и выполнен расчет для 2-х периодов входного сигнала. Начиная со 2-го периода, метод трапеций выдал неверное решение для тока через емкостной делитель без диагностических сообщений об ошибках (рис. 10), что означает не решенность проблемы «ложных колебаний» при реализации неявного метода трапеций (по этой причине неявный метод трапеций не применяется в

пакетах математических программ MATLAB, Maple, Mathematica и т.п.) [4],[5].

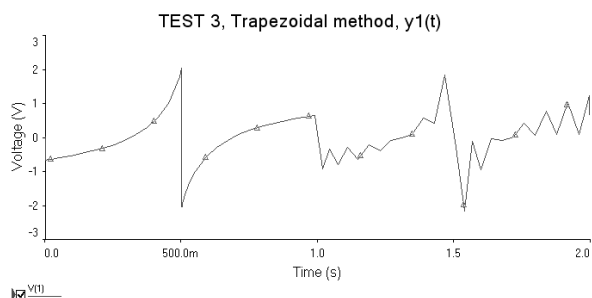


Рис. 10. Расчет теста 3 методом трапеций

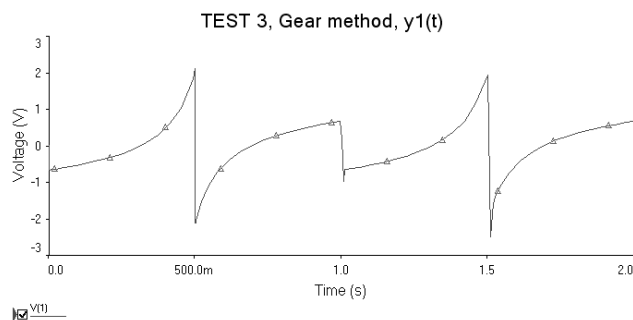


Рис. 11. Расчет теста 3 методом Гира

Метод Гира успешно справился с этим тестом (рис. 11).

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для конкретных классов проектируемых электронных схем необходимо иметь наборы тестовых практических и математических задач с известным заведомо достоверным и точным решением для правильного выбора и настройки соответствующих решателей систем ОДУ и правильной оценки получаемых результатов численного моделирования проектируемых схем.

Разработанная методика тестирования на математических тестах решателей систем ОДУ в EDA пакетах выявила их основной недостаток – возможное получение без диагностических сообщений неверного результата численного моделирования электронных схем при невысокой ($\epsilon_{ps} = 0.001$) заданной относительной точности решения систем ОДУ.

Любые, даже правдоподобные, результаты численного моделирования электронных схем, полученные с помощью EDA пакетов, использующих решатель систем ОДУ SPICE, следует многократно перепроверять для более высоких требований к точности интегрирования решаемых систем ОДУ, ограничив максимальный размер шага интегрирования.

Результаты тестирования EDA пакета Multisim версии 12.0 показали, что его не следует рекомендовать для моделирования высокочастотных

схем с большим разбросом постоянных времени. Этот вывод совпадает с аналогичным выводом автора статьи [6].

Новые научные результаты предполагается получить в направлении разработки для EDA пакетов решателей систем ОДУ, в которых будет устранен указанный выше недостаток [7]-[9]. Для достоверного и точного решения систем ОДУ при невысоких требованиях к математической точности результатов будут реализованы только $A(\pi/2)$ -устойчивые методы решения систем ОДУ [7], т.к. при использовании других методов решения систем ОДУ трудно обеспечить устойчивость численного решения при увеличении шага интегрирования в случае невысоких значений параметра ϵ_{ps} .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] O. Vityaz, V.Porra. Testing of Time Domain Simulators for Nonlinear Electronic Circuits. Helsinki University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, Electronic Circuit Design Laboratory, Report 4, Finland, July 1988. 65 pages.
- [2] Alan C. Hindmarsh, Linda R. Petzold. Algorithms and Software for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations. Numerical Mathematics Group Center for Computational Sciences@Engineering, UCRL-JC-116619, April 19 1994, 38 pages..
- [3] Guiyou Mao, L.R. Petzold. Efficient integration over discontinuities for differential-algebraic systems, Computers & Mathematics with Applications, Volume 43, Issues 1–2, January 2002, Pages 65-79.
- [4] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи: Пер. с англ. -М.: Мир, 2001. - 498 с.
Ernst Hairer, Gerhard Wanner. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, 1996, 614 pages.
- [5] Kundert K. The designer's guide to SPICE and Spectre. - Kluwer Academic Publisher. – 1995. - 371 с.
- [6] Макаренко В. Проблемы моделирования кварцевых генераторов в среде NI Multisim // Электронные компоненты и системы - 2010. - №7. - С. 43-49.
V. Makarenko PROBLEMS OF MODELLING OF QUARTZ OSCILLATORS IN THE ENVIRONMENT OF NI MULTISIM // VD MAIS. 2010. № 7. P.43-49.
- [7] Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. - 2010. – часть 1 - №7. С. 16-24, часть 2 - №8. С. 23-26.
- [8] В.Б.Маничев, В.В.Глазкова, Д.Ю.Кожевников, Д.А.Кириянов, М.К.Сахаров Решение систем линейных алгебраических уравнений с удвоенной точностью вычислений на языке Си. //Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. 2011. - Вып. 4. С. 25-36
- [9] Жук Д.М., Маничев В.Б., Сахаров М.К. SADEL – библиотека «сверхточных» решателей для программного комплекса ПА10 (SADEL-PA10). В сб. научных трудов МЭС-2012 - М.: ИППМ РАН, 2012. С. 147-153.